Ana-Nacht 20/21: Lösungen Grundlagen

1. a) Beh.: F.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$.

Beweis:

IA: $n=1$: $\sum_{i=1}^{1} (2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2 = n^2$ ✓

IV: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$.

IBeh.: Dann gilt $\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1) = (n+1)^2$.

Beweis:

Es ist
$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) + (2(n+1)-1)$$
$$\overset{IV}{=} n^2 + 2(n+1) - 1$$
$$= n^2 + 2n + 2 - 1$$
$$= n^2 + 2n + 1$$
$$\overset{\text{Bin. F.}}{=} (n+1)^2.$$
$\square$

b) Beh.: F.a. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt: $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$.

Beweis:

IA: $n=2$: $\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$. ✓

IV: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$.

IBeh.: Dann gilt: $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Beweis:

Es ist
$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot n}$$
$$\overset{IV}{=} 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1) \cdot n}$$
$$= 1 + \left(\frac{-(n+1)}{n(n+1)}\right) + \frac{1}{(n+1) \cdot n}$$
$$= 1 + \left(\frac{-n-1+1}{n \cdot (n+1)}\right)$$
$$= 1 + \left(\frac{-n}{n \cdot (n+1)}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$
$\square$

Zusatz: Beh.: F.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\binom{2n}{n} < 4^n$.

Beweis:

IA: $n=1$: $\binom{2n}{n} = \binom{2\cdot 1}{1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2 < 4 = 4^n$. ✓

IV: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\binom{2n}{n} < 4^n$.

IBeh.: Dann gilt: $\binom{2(n+1)}{n+1} < 4^{n+1}$.

Beweis:

Es ist $\binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!((2n+2)-(n+1))!}$

$$= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n)!\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}{n!(n+1)\cdot n!(n+1)}$$

$$= \frac{2n!}{n!\cdot\underbrace{(2n-n)!}_{=n}} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$= \binom{2n}{n} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$\overset{IV}{<} 4^n \cdot \frac{(2n)^2+6n+2}{n^2+2n+1}$$

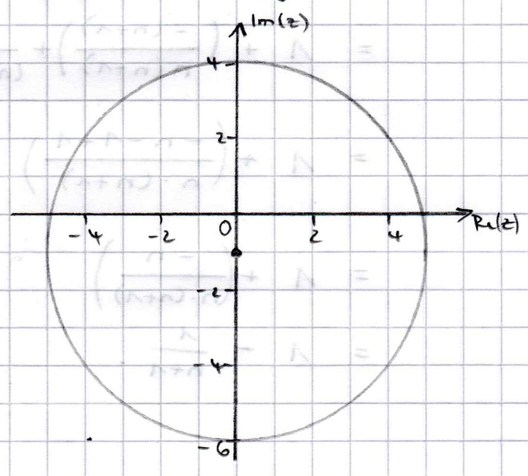
$$= 4^n \cdot \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}$$

$$< 4^n \cdot \frac{4n^2+8n+4}{n^2+2n+1}$$

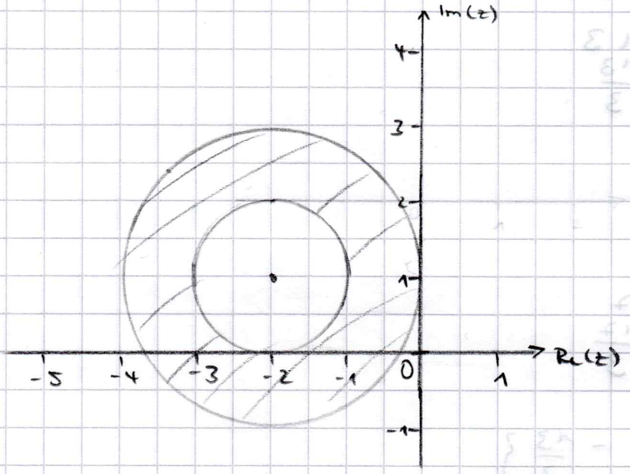
$$= 4^n \cdot 4 \cdot \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+1}$$

$$= 4^{n+1}. \qquad \square$$

2. a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = 5\} = \{z \in \mathbb{C} : |z-(-i)| = 5\}$

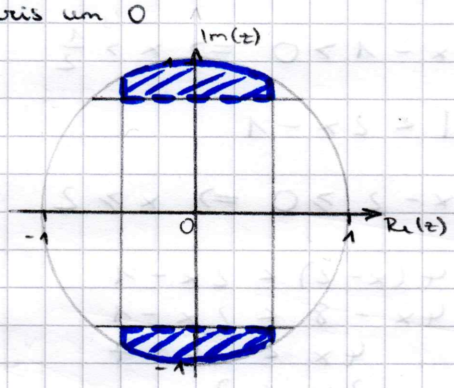


b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \underbrace{|z + 2 - i|}_{= |z - (i-2)|} \leq 2\}$



c) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} : \underbrace{|z| \leq 1}_{\Downarrow}, \underbrace{|Re(z)| \leq \frac{1}{2}}_{\Downarrow}, \underbrace{|Im(z)| > \frac{3}{4}}_{\Downarrow}\}$

z im Einheitskreis um 0 $\quad -\frac{1}{2} \leq Re(z) \leq \frac{1}{2} \quad Im(z) > \frac{3}{4} \vee Im(z) < -\frac{3}{4}$



3. a) $x^2 - 9 \leq 8x \quad | -8x$

$x^2 - 8x - 9 \leq 0$

$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 + 9}$

$= 4 \pm \sqrt{25} = 4 \pm 5$

$x_1 = 4 - 5 = -1$

$x_2 = 4 + 5 = 9$

$f(x) = x^2 - 8x - 9$ beschreibt eine nach oben geöffnete Parabel. D.h., die Funktionswerte sind rechts von x_1 & links von x_2 kleiner gleich 0.

$\Rightarrow L = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 9\}$

b) $|3x + 15| = 2$

$$|3x + 15| = \begin{cases} 3x + 15 & \text{für } 3x + 15 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{15}{3} \\ -(3x + 15) & \text{für } 3x + 15 < 0 \Rightarrow x < -\frac{15}{3} \end{cases}$$

1. Fall: $x \geq -\frac{15}{3}$

$$3x + 15 = 2$$
$$3x = -13$$
$$x_1 = -\frac{13}{3}$$

2. Fall: $x < -\frac{15}{3}$

$$-3x - 15 = 2$$
$$-3x = 17$$
$$x_2 = -\frac{17}{3}$$

$\Rightarrow \quad L = \{-\frac{17}{3};\ -\frac{13}{3}\}$

c) $\frac{4|x-2|}{2x-1} < 1$

? $2x - 1 \neq 0$

1. Fall: $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

$4|x-2| < 2x - 1$

1.1. Fall: $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

$$4(x-2) < 2x - 1$$
$$4x - 8 < 2x - 1$$
$$4x < 2x + 7$$
$$2x < 7$$
$$x < \frac{7}{2} \quad \wedge \quad x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{2 \leq x < \frac{7}{2}}$$

1.2. Fall: $x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2 \wedge x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 2$

$$-4(x-2) < 2x - 1$$
$$-4x + 8 < 2x - 1$$
$$-4x < 2x - 9$$
$$-6x < -9$$
$$x > \frac{3}{2} \quad \wedge \quad \frac{1}{2} < x < 2 \Rightarrow \underline{\frac{3}{2} < x < 2}$$

2. Fall: $2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

$4|x-2| > 2x - 1$

2.1. Fall: $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Es soll also $x \geq 2$ & $x < \frac{1}{2}$ sein. Das ist nicht möglich. Somit ex. keine Lösung für den Fall.

2.2. Fall: $x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2 \wedge x < \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

$$-4(x-2) > 2x - 1$$
$$-4x + 8 > 2x - 1$$
$$-6x > -9$$
$$x < \frac{3}{2} \quad \wedge \quad x < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{x < \frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow \quad L = \{ x \in \mathbb{R} : \frac{3}{2} < x < \frac{7}{2} \lor x < \frac{1}{2} \}$

4.a) $M_1 = \{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{n-m}{n} \text{ mit } n,m \in \mathbb{N} \}$

Man sollte sich zuerst eine Fallunterschidung für n & m anschauen (ggf. auch mit ein paar konkreten Zahlenbeispielen):

1. $n = m \quad \Rightarrow x = 0$
2. $n > m$: z.B.: $n = 5$ & $m = 3 \Rightarrow x = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}$
   $n = 6$ & $m = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$
3. $m > n$: z.B.: $n = 3$ & $m = 5 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$
   $n = 1$ & $m = 6 \Rightarrow x = -5$
   $n = 1$ & $m = 8 \Rightarrow x = -7$

Nun zu der Frage, ob obere Schranken existieren:
x kann offenbar positiv werden & zwar im Fall $n > m$. Dann gilt $0 < n - m < n$. Es folgt also:

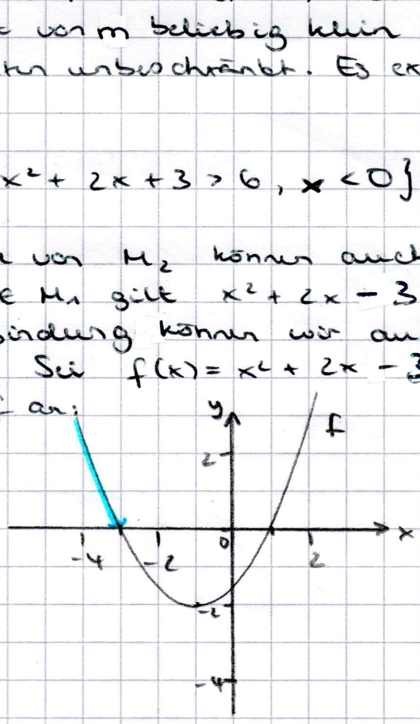
$$0 < \underbrace{\frac{n-m}{n}}_{=x} < 1.$$

Somit ist 1 eine obere Schranke von M_1, die selbst nicht angenommen wird. Nun kann man durch Variation von n & m beliebig nah an 1 kommen, wodurch klar wird, dass 1 auch die kleinste obere Schranke ist.
$\Rightarrow \quad 1 = \sup(M_1)$
Da $1 \notin M_1$ ist, ex. kein Maximum von M_1.

Nun gilt es noch eine kleinste untere Schranke zu finden (, falls existiert). An den Beispielen oben sieht man, dass M_1 auch neg. Zahlen enthält. An den letzten beiden Beispielen kann man folgendes schon erkennen:
Wählen wir $n = 1$ & $m \in \mathbb{N}$ beliebig fest, dann ist $x = \frac{n-m}{n} = 1 - m = -(m-1) < 0$. Somit kann x in Abhängigkeit von m beliebig klein werden. Somit ist M_3 nach unten unbeschränkt. Es ex. weder Infimum noch Minimum.

b) $M_2 = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 3 > 6, x < 0 \}$

Die Elemente von M_2 können auch wie folgt beschrieben werden: F.a. $x \in M_1$ gilt $x^2 + 2x - 3 > 0$ und $x < 0$. Die erste Bindung können wir auch als Funktion betrachten. Sei $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Schauen wir uns den Graph von f an:



Nun soll auch $f(x) > 0$ & $x < 0$ gelten. Somit ergibt sich M_2.

Wir sehen, dass M_2 nach unten unbeschränkt ist. Es ex. also weder Infimum noch Minimum. Allerdings ist M_2 nach oben beschränkt: f. a. $x \in M_2$ gilt: $x < -3$. Somit ist $-3 = \sup(M_2)$. Es ex. kein Maximum, da $-3 \notin M_2$ ist.

c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } nx = n^2 + 2\}$

Da $n \in \mathbb{N}$ & somit $n \neq 0$ ist, erhalten wir: $x = \frac{n^2+2}{n} = n + \frac{2}{n}$.
Aus $n \in \mathbb{N}$ folgt auch, dass $x > 0$ sein muss.
Somit ist 0 eine untere Schranke von M_3, aber es gilt noch zu überprüfen, ob sie die größte untere Schranke ist.

Ein paar Beispiele: $n = 1 \Rightarrow x = 1 + 2 = 3$
$n = 2 \Rightarrow x = 2 + 1 = 3$
$n = 3 \Rightarrow x = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$

Da $n \geq 1$ ist, wird x mit wachsendem n größer-gleich 3. Somit wird x nie kleiner als 3. D.h.: $3 = \inf(M_3) = \min(M_3)$. Anhand der Bsp'e sehen wir auch, dass M_3 nach oben unbeschränkt ist. Es ex. also weder Supremum noch Maximum von M_3, da $n \in \mathbb{N}$ ist & x somit beliebig groß werden kann.

Folgen
Lösungen

1. Aufgabe:

a) Zeige mit Hilfe der Definition, dass die Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1-2n}{5+3n}$$

konvergiert. Das heißt: Bestimme den Grenzwert a und gib zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ an so, dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze $a := -\frac{2}{3}$. Wähle $N(\varepsilon) \geq \dfrac{2}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq N(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &= \left|\frac{2-2n}{5+3n} + \frac{2}{3}\right| \\
&= \left|\frac{3-6n+10+6n}{15+9n}\right| = \left|\frac{13}{15+9n}\right| \\
&< \left|\frac{13}{9n}\right| < \left|\frac{18}{9n}\right| \\
&= \frac{2}{n} \leq \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Somit konvergiert (a_n) gegen $-\frac{2}{3}$.

b) Zeige mit Hilfe der Definition, dass die Zahlenfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = 2^n$$

nicht beschränkt ist und somit divergiert.

Lösung: Die Folge ist monoton wachsend, denn es gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \geq 1$$

Sei $S \in \mathbb{R}$ mit $S > 0$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \log_2(S)$. Dann gilt aufgrund der Monotonie:

$$b_n = 2^n \geq 2^{\log_2(S)} = S$$

Somit ist (b_n) unbeschränkt und divergent.

2. Aufgabe:

Untersuche folgende reelle Zahlenfolgen auf Konvergenz und gib ggf. den Grenzwert an!

$$a_n = \frac{n^2+3n+5}{n^2+4n+16}, \quad b_n = \frac{5-\sqrt[n]{23}}{\sqrt[n]{n}+\frac{1}{n^2}}, \quad c_n = \sqrt{3n+6}-\sqrt{3n+1}$$

$$d_n = \sqrt[n]{4+\frac{n-1}{n+1}}, \quad e_n = \frac{1}{n}\cdot\sin(n^2), \quad f_n = 9^{n+1}\cdot\left(\frac{n-1}{3n}\right)^{2n}$$

Lösung: Hier wird nur eine Lösungsskizze angegeben. In der Klausur müssten die Lösungen noch mehr ausformuliert werden.

- (a_n) konvergiert nach Grenzwertsätzen gegen 1.
- (b_n) konvergiert nach Grenzwertsätzen gegen $\frac{5-1}{1+0}=4$.
- $$c_n = \frac{\left(\sqrt{3n+6}-\sqrt{3n+1}\right)\cdot\left(\sqrt{3n+6}+\sqrt{3n+1}\right)}{\sqrt{3n+6}+\sqrt{3n+1}} = \frac{3n+6-(3n+1)}{\sqrt{3n+6}+\sqrt{3n+1}} = \frac{5}{\sqrt{3n+6}+\sqrt{3n+1}} \to 0$$
- $1=\sqrt[n]{1}\le d_n = \sqrt[n]{4+\frac{n-1}{n+1}} \le \sqrt[n]{5}$

  Wegen $\sqrt[n]{5}\to 1$ füt $n\to\infty$ folgt, dass d_n den Grenzwert 1 hat.
- Da $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge und $\sin(n^2)$ eine beschränkte Folge ist, ist (e_n) eine Nullfolge.
- $$f_n = 9^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{2n} = \frac{9^{n+1}}{9^n}\cdot\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \to 9\cdot e^{-2} = \frac{9}{e^2}$$

3. Aufgabe:
Untersuche folgende rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz!

$$a_{n+1} = 1-\frac{1}{2+a_n} \quad \text{mit } a_1 = 0$$

$$b_{n+2} = \frac{2}{3}\cdot b_{n+1}+\frac{1}{2}\cdot b_n \quad \text{mit } b_1=1, b_2=2$$

(Hinweis zur Monotonie von b_n: Betrachte im Induktionsschritt $b_{n+3}-b_{n+2}$)
Lösung:

- Mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass $0\le a_n\le a_{n+1}$ gilt:
  - IA: Es gilt $a_1=0\ge 0$ und $a_2 = 1-\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}\ge 0 = a_1$. Insgesamt gilt also: $0\le a_1\le a_2$.
  - IV: Es gelte $0\le a_n\le a_{n+1}$ für ein $n\in\mathbb{N}$.
  - IS: Dann ist
    $$a_{n+2} = 1-\frac{1}{2+a_{n+1}} \ge 1-\frac{1}{2+a_n} = a_{n+1}\ge 0$$

Somit ist (a_n) monoton wachsend. Außerdem ist (a_n) nach oben beschränkt, wie man an folgender Ungleichung sieht:

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{\underbrace{2 + a_n}_{\geq 0}} \leq 1$$

Da (a_n) monoton wachsend und beschränkt ist, folgt, dass (a_n) konvergiert. Den Grenzwert a ermitteln wir mit der Gleichung

$$a = 1 - \frac{1}{2 + a}$$

Daraus folgt:

$$2a + a^2 = 1 + a \Leftrightarrow a^2 + a - 1 = 0 \Leftrightarrow a \in \{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}\}$$

Da für alle $n \in \mathbb{N}$ schon $a_n \geq 0$ gilt, muss auch $a \geq 0$ sein. Somit ist $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

- Per Induktion lässt sich zeigen, dass (b_n) ab $n = 3$ monoton wachsend ist.
  - IA: Es gilt: $b_3 = ... = \frac{11}{6}$ und $b_4 = ... = \frac{20}{9}$. Somit ist $b_4 \geq b_3$.
  - IV: Es sei $b_{n+2} \geq b_{n+1} \geq b_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$.
  - IS: Dann gilt:

$$\begin{aligned} b_{n+3} - b_{n+2} &= \frac{2}{3} \cdot b_{n+2} + \frac{1}{2} \cdot b_{n+1} - \left(\frac{2}{3} \cdot b_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot b_n\right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \underbrace{(b_{n+2} - b_{n+1})}_{\geq 0} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(b_{n+1} - b_n)}_{\geq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

  Die Folge ist monoton wachsend. Wäre sie konvergent, so würde für den Grenzwert b gelten:

$$b = \frac{2}{3} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot b \Leftrightarrow b = 0$$

  Da aber (b_n) ab $b_3 = \frac{11}{6}$ monoton wächst, kann die Folge nur divergieren.

4. Aufgabe:

Man gebe alle Häufungspunkte der Folgen an!

$$a_n = \frac{1}{n} + 2 \cdot (-1)^n, \quad b_n = \left(\frac{5n + 7}{n}\right) \cdot i^n$$

Lösung:

- Für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{2k} = \frac{1}{2k} + 2 \cdot (-1)^{2k} = \frac{1}{2k} + 2$$

  Diese Teilfolge konvergiert gegen 2.

  Weiter gilt:

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2k + 1} + 2 \cdot (-1)^{2k+1} = \frac{1}{2k + 1} - 2$$

  Diese Teilfolge konvergiert gegen -2.

  Somit sind 2 und -2 Häufungspunkte. Gibt es weitere Häufungspunkte? Angenommen $u \in \mathbb{R}$ ist ein weiterer Häufungspunkt. Dann existiert eine Teilfolge a_{n_k}, die gegen u konvergiert. Dann liegen unendlich viele Glieder von a_{n_k} in der Teilfolge a_{2k} oder in der Teilfolge a_{2k+1}. Somit hat a_{n_k} eine Teilfolge, die gegen 2 oder -2 kovergiert. Da bei einer konvergenten Folge auch jede Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert konvergiert, folgt $b = 2$ oder $b = -2$. Somit gibt es keinen weiteren Häufungspunkt.

Der Limes superior ist 2, der Limes inferior ist -2. Da die Folge zwei Häufungspunkte hat, konvergiert sie nicht.

- Es gilt:

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{für } 4 \mid n \\ i & \text{für } 4 \mid n-1 \\ -1 & \text{für } 4 \mid n-2 \\ -i & \text{für } 4 \mid n-3 \end{cases}$$

Somit gilt für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} b_{4k} &= \frac{5n+7}{n} = 5 + \frac{7}{n} \to 5 \\ b_{4k+1} &= \frac{5n+7}{n} \cdot i = \left(5 + \frac{7}{n}\right) \cdot i \to 5i \\ b_{4k+2} &= -\frac{5n+7}{n} = -5 - \frac{7}{n} \to -5 \\ b_{4k+3} &= -\frac{5n+7}{n} \cdot i = -5i - \frac{7}{n} \cdot i \to -5i \end{aligned}$$

Somit sind $5, 5i, -5$ und $-5i$ Häufungspunkte von (b_n). Angenommen, v ist ein weiterer Häufungspunkt. Dann gibt es eine konvergente Teilfolge (b_{n_k}), die gegen v konvergiert. Da jede natürliche Zahl entweder durch 4 teilbar ist oder beim Teilen durch 4 den Rest $1, 2$ oder 3 lässt, sind unendlich viele Glieder der Folge (b_{n_k}) auch Folgenglieder von (b_{4k}) oder (b_{4k+1}) oder (b_{4k+2}) oder (b_{4k+4}). Somit ist $v \in \{5, 5i, -5, -5i\}$. Es gibt also keine weiteren Häufungspunkte.

Da es mehrere Häufungspunkte gibt, konvergiert die Folge nicht.

Lösungen Funktionen

1. Aufgabe:

Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) := \begin{cases} ax^2 + b & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$
stetig und differenzierbar?
Lösung
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig im Punkt x_0 wenn $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ gilt.
i.e.: f ist außerhalb der kritischen Stelle $x_0 = 1$ als Polynom für alle $a, b \in \mathbb{R}$ stetig. Daher bleibt nur die Stelle $x_0 = 1$ zu untersuchen.
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$
$\Leftrightarrow \lim_{x \to 1^-} x = a + b = \lim_{x \to 1^+} ax^2 + b$
$\Leftrightarrow 1 = a + b \Leftrightarrow 1 - a = b$
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar im Punkt x_0 wenn $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0}{x-x_0}$ gilt.
i.e.: f ist außerhalb der kritischen Stelle $x_0 = 1$ als Polynom für alle $a, b \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Daher bleibt nur die Stelle $x_0 = 1$ zu untersuchen. $lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-a-b}{x-1}$
$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x-a-1+a}{x-1} = 1$
$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{ax^2+b}{x-1}$
$\overset{\text{L'H}}{=} lim_{x \to 1^+} 2ax = 2a$
$\Leftrightarrow 2a = 1$
$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$
Damit folgt insgesamt auch $b = \frac{1}{2}$ wegen $a + b = 1$.

2. Aufgabe:

Untersuche die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$g(x) := \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ e^{xln(x)} & x > 0 \end{cases}$

a) auf Stetigkeit
Lösung
Eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig im Punkt x_0 wenn $\lim_{x \to x_0^-} g(x) = g(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} g(x)$ gilt.
i.e.: g ist außerhalb der kritischen Stelle $x_0 = 0$ als Polynom bzw. Komposition stetiger Funktionen stetig. Daher bleibt nur die Stelle $x_0 = 0$ zu untersuchen.

$\lim_{x \to x_0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} x + 1 = 1$
$\lim_{x \to x_0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{xln(x)} = e^{\lim_{x \to 0^+} xln(x)}$
$= e^{\lim_{x \to 0^+} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x}}} \overset{\text{L'H}}{=} e^{\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}}$

$= e^{\lim_{x\to 0^+} -x} = e^0 = 1$
$g(0) = 0 + 1 = 1$

Damit ist g stetig.

b) auf Differenzierbarkeit
Lösung
Es ist
$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{xln(x)}-1}{x}$
$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} x^x(ln(x)+1)$
$= \lim_{x\to 0^+} x^x \lim_{x\to 0^+} ln(x) + 1 = 1 \lim_{x\to 0^+} ln(x) + 1 = -\infty$

Damit ist g nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

3. Aufgabe:

Untersuche die auf dem Intervall $[0, \infty)$ definierte Funktion
$h(x) := \begin{cases} x^2cos(\frac{1}{x}) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit!
Lösung
Zur Stetigkeit: Es ist h in allen Punkten außer $x_0 = 0$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. In $x_0 = 0$ gilt:

$$\lim_{x\to x_0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2cos(\tfrac{1}{x}) = 0,$$

da $-1 \leq cos(x) \leq 1$ gilt und $\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$ ist.
Weiter ist $h(0) = 0$ und somit ist h auch in $x_0 = 0$ stetig.

Zur Differenzierbarkeit: Es ist h in allen Punkten außer $x_0 = 0$ als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. In $x_0 = 0$ gilt:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2cos(\frac{1}{x})}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} xcos(\tfrac{1}{x}) = 0$$

Mit gleicher Argumentation, wie bei der Stetigkeit, ist also h auch in $x_0 = 0$ differenzierbar.

4. Aufgabe:

Gegeben ist die Funktion $arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
Berechne die Ableitung von $arctan$.
Lösung
Mit dem Satz über die Ableitung der Umkehrabbildung gilt $y' = f'(x) = \frac{1}{f^{-1'}(y)}$
i.e.: $(arctan(x))' = \frac{1}{(tan(y))'}$
Es ist $(tan(y))' = (\frac{sin(y)}{cosy})' = \frac{cos^2(y)-(-sin(y)sin(y))}{cos^2(y)}$
$= \frac{cos^2(y)+sin^2(y)}{cos^2(y)} = \frac{1}{cos^2(y)}$
Also ist $\frac{1}{(tan(y))'} = cos^2(y) = \frac{cos^2(y)}{sin^2(y)+cos^2(y)} = \frac{1}{tan^2(y)+1}$
Insgesamt also $(arctan(x))' = \frac{1}{tan^2(y)+1} = \frac{1}{x^2+1}$, da $y = arctan(x)$ bzw. $x = tan(y)$ gilt.

5. Aufgabe:

Untersuche die Gleichung $e^{\sqrt{x}} = sin(x) + 2$ auf Existenz von Lösungen in den positiven reellen Zahlen.

Lösung

$e^{\sqrt{x}} = sin(x) + 2 \Leftrightarrow 0 = e^{\sqrt{x}} - sin(x) - 2$. Die Betrachtung der Gleichung lässt sich auf die Nullstellenuntersuchung der Funktion $f(x) = e^{\sqrt{x}} - sin(x) - 2$ zurückführen.

Es ist $f(1) = e - sin(1) - 2 < 0$ und $f(2) = e^2 - sin(2) - 2 > 0$. Damit existiert mit dem Zwischenwertsatz mindestens ein $x \in [1, 2]$ für das $f(x) = 0$ gilt. Somit existiert eine Lösung der Gleichung in den positiven reellen Zahlen.

Beweise

1. Aufgabe:

Beweise für $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Beweis. Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$. Ferner gilt mit den binomischen Formeln für $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (\underbrace{x + y}_{\in \mathbb{R}})^2 \geq 0, \tag{1}$$

sowie

$$x^2 - 2xy + y^2 = (\underbrace{x - y}_{\in \mathbb{R}})^2 \geq 0. \tag{2}$$

Umstellen in (1) liefert

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq -xy.$$

Umstellen in (2) liefert

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq xy.$$

Aufgrund der Definition des Betrags folgt nun

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

womit unsere Behauptung gezeigt ist. □

2. Aufgabe:

Beweise: Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge ist und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge ist, welche $a_n - b_n \to 0$ für $n \to \infty$ erfüllt, so konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis. Definiere $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig, dann gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|b_n - a| = |b_n - a_n + a_n - a| \leq |b_n - a_n| + |a_n - a|.$$

Da $a_n \to a$ und $a_n - b_n \to 0$ gilt existieren $N_1(\epsilon), N_2(\epsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall n \geq N_1(\epsilon): \quad |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

und

$$\forall n \geq N_2(\epsilon): \quad |b_n - a_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Definiere nun $N(\epsilon) := \max\{N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)\}$. Dann gilt

$$\forall n \geq N(\epsilon): |b_n - a| \leq |b_n - a_n| + |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

und damit unsere Behauptung. □

3. Aufgabe:

Wahr oder Falsch?

f) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Falls $\lim_{n\to\infty} 2a_n = 0$ gilt, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. Definiere $a_n := \frac{1}{n}$. Dann gilt mit den Grenzwertsätzen $\lim_{n\to\infty} 2a_n = 2\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, jedoch ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergent, da die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert. Die Aussage ist demnach falsch. □

f) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konvergent.

Beweis. Definiere $a_n := (-1)^n \frac{1}{n}$. Dann gilt nach den Grenzwertsätzen, da $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch 1 beschränkt ist:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Allerdings gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-1)^n \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Demnach divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, da die harmonische Reihe divergiert. Die Aussage ist also im Allgemeinen falsch. □

f) Jede monoton fallende Folge ist eine Nullfolge.

Beweis. Definiere die Folge $a_n = 2 + \frac{1}{n}$. Da für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $n + 1 > n$ gilt, folgt $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ aus den Ordnungsaxiomen für einen geordneten Körper. Damit gilt

$$a_n = 2 + \frac{1}{n} > 2 + \frac{1}{n+1} = a_{n+1}.$$

Also ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Allerdings folgt aus den Grenzwertsätzen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2.$$

Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und die Aussage damit falsch. □

w) Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis. Die Aussage ist wahr und wurde als Satz von Bolzano-Weierstraß bewiesen. □

f) Jede Cauchy-Folge konvergiert.

Beweis. Definiere die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ als Ziffernfolge der Dezimaldarstellung von π und die Folge

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot 10^{-k}$$

als Dezimaldarstellung von π bis zur n-ten Nachkommastelle in $\mathbb{Q}$. Dann gilt für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$

$$|a_n - a_m| = \sum_{k=m+1}^{n} c_k \cdot 10^{-k} \leq 10^{-m},$$

da $0 \leq c_k \leq 9$ erfüllen. Es gilt $10^{-m} \to 0$ für $m \to \infty$. Demnach existiert, für $\epsilon > 0$ beliebig, ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall n \geq \mathbb{N}: \quad 10^{-n} < \epsilon.$$

Somit folgt

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N: \quad |a_n - a_m| \leq 10^{-m} < \epsilon.$$

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$, welche jedoch nicht in Q konvergiert, da $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt. Somit konvergiert nicht jede Cauchy-Folge und die Aussage ist demnach im Allgemeinen falsch. □

4. Aufgabe:

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge ist, die für alle $n \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft $a_n \geq 0$ erfüllt. Beweise: Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

Beweis. Aus der Voraussetzung, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, folgt mit dem notwendigen Kriterium für Reihenkonvergenz, dass $a_n \to 0$ gilt. Folglich existiert ein Index $N \in \mathbb{N}$ so, dass $a_n \leq 1$ für alle $n \geq N$ gilt. Somit gilt für $n \geq N$ die Ungleichung $a_n^2 \leq a_n$. Insgesamt gilt also

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ konvergiert nach Voraussetzung. Somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ nach dem Majorantenkriterium. □

5. Aufgabe:

Beweise: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage mit natürlicher Induktion.
Induktionsanfang: Für $n = 2$ gilt mit $\sqrt{2} > 1$:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} > \frac{1+1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Induktionsvoraussetzung: Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ so, dass

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m}} > \sqrt{m}$$

gilt.

Induktionsschritt: Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung zeigen wir, dass die Aussage auch für $m+1$ gilt. Es gilt mit $\sqrt{m+1} > \sqrt{m}$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} > \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} = \frac{\sqrt{m}\sqrt{m+1}+1}{\sqrt{m+1}}$$

$$> \frac{\sqrt{m}\sqrt{m}+1}{\sqrt{m+1}} = \frac{m+1}{\sqrt{m+1}} = \sqrt{m+1}.$$

Somit folgt die Aussage mit natürlicher Induktion. □

6. Aufgabe:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Beweise: Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ die Aussage $a_n > 0$ gilt.

Beweis. Definiere $\epsilon := \frac{a}{2}$. Da $a_n \to a$ gilt, folgt, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq N : \quad |a_n - a| \leq \epsilon$$

gibt. Falls $a_n \geq a > 0$ gilt ist nichts zu zeigen. Im Fall $a_n \leq a$ folgt für $n \geq N$

$$\epsilon > |a_n - a| = a - a_n \implies a_n > a - \epsilon = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

In beiden Fällen gilt für $n \geq N$ schon $a_n > 0$ und damit ist unsere Aussage gezeigt. □

7. Aufgabe:

Beweise für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{2}x^2 + 3 \geq 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x^2}.$$

Beweis. Wir multiplizieren die Ungleichung mit $x^2 > 0$ um eine äquivalente Ungleichung zu erhalten:

$$\frac{1}{2}x^2 + 3 \geq 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x^2} \iff \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 \geq 2\left(x^3 + x\right) - \frac{1}{2}.$$

Umstellen liefert die äquivalente Ungleichung

$$\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + \frac{1}{2} \geq 0 \iff x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \geq 0.$$

Mit dem Pascalschen Dreieck sieht man nun

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4 = ((x-1)^2)^2.$$

Da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt

$$\frac{1}{2}x^2 + 3 \geq 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x^2} \iff ((x-1)^2)^2 \geq 0.$$

Da die Aussage $((x-1)^2)^2 \geq 0$ erfüllt ist folgt unsere Behauptung. □

8. Aufgabe:

Beweise: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$xy \leq 0 \iff |x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}.$$

Beweis. Es gilt mit der Dreiecksungleichung

$$\max\{|x|,|y|\} = \frac{|x|+|y|+||y|-|x||}{2} \geq \frac{|x+y|+||y|-|x||}{2}.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass

$$xy \leq 0 \iff ||y|-|x|| \geq |x+y|$$

gilt. Wir beweisen erst die Richtung " $\implies$ ". Falls $y > 0, x < 0$ gilt, so folgt

$$|x+y| = |-|x|+|y|| = ||y|-|x||.$$

Falls $y < 0, x > 0$ gilt, so folgt

$$|x+y| = ||x|-|y|| = ||y|-|x||.$$

Somit haben wir die Hinrichtung bewiesen (Wie wir sehen lässt sich die Argumentation auch von unten nach oben lesen).

Für die Rückrichtung müssen wir nur die Fälle $x > 0, y > 0$ und $x < 0, y < 0$ ausschließen. Im Fall $x > 0, y > 0$ gilt

$$|x+y| = x+y > y-x, \quad \text{und} \quad |x+y| = x+y > x-y.$$

Also folgt

$$|x+y| > |y-x| = ||y|-|x||.$$

Somit ist der Fall $x > 0, y > 0$ nicht möglich. Im Fall $x < 0, y < 0$ folgt $-x > x$ und damit

$$|x+y| = -x-y > x-y.$$

Analog folgt $-y > y$ und damit

$$|x+y| = -x-y > y-x.$$

Insgesamt gilt damit

$$|x+y| > |x-y| = ||y|-|x||.$$

Somit ist auch der Fall $x < 0, y < 0$ nicht möglich. Damit folgt die Behauptung. □

9. Aufgabe:

Beweise: Für $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ gilt

$$\mathrm{Im}(z + \frac{1}{z}) = 0 \iff \mathrm{Im} z = 0 \vee |z| = 1.$$

Beweis. Es gilt mit $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$$z + \frac{1}{z} = \frac{z^2+1}{z} = \frac{|z|^2 z + \bar{z}}{|z|^2}.$$

Wir setzen $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ geeignet und erhalten:

$$\frac{(x^2+y^2)(x+iy)+x-iy}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2+1)x - i(x^2+y^2-1)y}{x^2+y^2}.$$

Somit gilt

$$\mathrm{Im}(z+\frac{1}{z}) = 0 \iff \mathrm{Im}\left(\frac{(x^2+y^2+1)x - i(x^2+y^2-1)y}{x^2+y^2}\right)$$

$$= 0 \iff (x^2+y^2-1)y = 0 \iff \mathrm{Im} z = y = 0 \quad \vee \quad |z| = \sqrt{x^2+y^2} = 1.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen. □

Reihen

1. Aufgabe:

Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^3}$

Wir können hier ausnutzen, dass der Kosinus beschränkt ist, da er nur auf das Intervall $[-1,1]$ abbildet. Da wir von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ bereits aus der Vorlesung wissen, dass sie konvergiert bietet sich also das Majorantenkriterium an. Es gilt nämlich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos^2(n)}{n^3} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty.$$

Damit ist die Reihe konvergent.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}$

Die Folge, die da im Nenner steht, sollte uns bekannt vorkommen, die sieht fast aus wie die Folge, die gegen die Eulersche Zahl konvergiert, wir erinnern uns:

$$(1+\frac{1}{n})^n \to e, \quad n \to \infty.$$

Damit ist nun aber auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(fracn-1n)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Dann ist aber die Folge die in der Reihe steht keine Nullfolge, somit kann die Reihe nach dem notwendigen Konvergenzkriterium nicht konvergieren.

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$

Hier funktioniert das Quotientenkriterium gut, weil sich dann im Bruch einiges rauskürzt. Es gilt nämlich: (wir nennen hier $a_n := \frac{n^5}{3^n}$)

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)^5 \cdot 3^n}{n^5 \cdot 3^{n+1}} \right| = \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n}\right)^5.$$

Da $\frac{n+1}{n} \to 1, \quad n \to \infty$, gilt daher

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \to \frac{1}{3} \cdot 1^5 = \frac{1}{3} < 1.$$

Wir können also aus dem Quotientenkriterium auf die Konvergenz der Reihe schlieSSen.

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{-n}}{n}$

Wegen der $(-1)^{n+1}$ denkt man hier wahrscheinlich zuerst an das Leibnitz-Kriterium, und das funktioniert auch, offenischtlich ist $\frac{e^{-n}}{n}=\frac{1}{ne^n}$ eine Nullfolge, und da man weiSS, dass die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, sieht man auch dass es eine monoton fallende Nullfolge ist, also folgt Konvergenz mit Leibnitz.
Eine andere Variante (bei der man weniger mit Monotonie argumentieren muss), wäre das Wurzelkriterium. Es gilt nämlich

$$\sqrt[n]{\left|(-1)^{n+1}\frac{e^{-n}}{n}\right|}=\frac{e^{-1}}{\sqrt[n]{n}}\to\frac{1}{e},\quad n\to\infty.$$

Hierbei wurde benutzt, dass $\sqrt[n]{n}\to 1$ für $n\to\infty$. Und da $\frac{1}{e}<1$ folgt die Konvergenz aus dem Wurzelkriterium.

e) $\sum_{n=3}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Hier stört uns irgendwie der Logarithmus, weil wir mit dem schwer irgendwelche Wurzel- oder Quotientenkriterien verwenden können - über den Quotient von zwei Logarithmen kann man im allgemeinen wenig sagen. Aber über den Logarithmus eines Quotienten! Da erinnern wir uns an die Logarithmen-Gesetze, nämlich:

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln(n).$$

Und damit ist die Reihe in einer viel besser handhabbaren Form, nämlich

$$\sum_{n=3}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\sum_{n=3}^{\infty}\ln(n+1)-\ln(n).$$

Die Form kann uns bekannt vorkommen, da wir im k-ten Summanden der Reihe einen Teil des (k-1)-ten wieder abziehen, erhalten wir hier eine Teleskopsumme, für die m-te Partialsumme sieht das so aus:

$$\sum_{n=3}^{m}\ln(n+1)-\ln(n)=\ln(m+1)-\ln(m)+\ln(m)-\ln(m-1)+...+\ln(5)-\ln(4)+\ln(4)-\ln(3)=\ln(m+1)-\ln(3).$$

Formal könnte man diese Rechnung auch noch durch eine vollständige Induktion beweisen, darauf wollen wir hier aber verzichten. Insgesamt bekommen wir aber, mit der Definition der Reihe als Limes der Partialsummen:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\ln(n+1)-\ln(n)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=3}^{m}\ln(n+1)-\ln(n)=\lim_{m\to\infty}\ln(m+1)-\ln(3)=\infty,$$

da der ln für $n\to\infty$ gegen unendlich geht. Die Reihe ist also divergent.

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^n}$

Der vermutlich leichteste Weg führt hier über das Wurzelkriterium, denn es gilt

$$\sqrt[n]{\frac{e^n}{n^n}}=\frac{e}{n}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Wegen $0 < 1$ folgt die Konvergenz der Reihe.
Eine andere Möglichkeit ist das Quotientenkriterium, da müssen wir nur etwas mehr rechnen:

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{e^{n+1}n^n}{e^n(n+1)^{n+1}} = \frac{e^{n+1}}{e^n}\frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)} \\ &= e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Das sieht so erstmal noch etwas fürchterlich aus, aber der Term $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ist in Aufgabe b) schon mal so ähnlich aufgetreten. Wenn wir das Reziproke betrachten, können wir nämlich erkennen, dass

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}, \quad n \to \infty.$$

Gleichzeitig gilt oben im Quotienten auch, das $\frac{1}{n+1}$ eine Nullfolge ist. Als Produkt konvergenter Folgen können wir also berechnen:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \to e\frac{1}{e}\cdot 0, \quad n \to \infty.$$

Wegen $0 < 1$ liefert uns also auch das Quotientenkriterium die Konvergenz der Reihe.

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-n-1}}$

Bei solchen Reihen, die quasi wie ein Polynom in n aussehen, kann man sich erstmal die höchsten auftretenden Potenzen von n anschauen, um ein Gefühl dafür zu bekommen, ob die Reihe konvergiert oder nicht. In diesem Fall wäre das $\frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$, wir können also annehmen, dass sich die Reihe verhält wie die harmonische Reihe, also divergiert. Zeigen müssen wir das natürlich trotzdem!
Wir sollten hier an das Minorantenkriterium denken, da wir ja eine ähnliche divergente Reihe kennen, müssen also nach unten abschätzen. Wegen $n \geq 0$ und $1 \geq 0$ wissen wir, dass $\sqrt{n^2-n-1} \leq \sqrt{n^2} = n$ ist, wir ziehen ja etwas positives ab. Beim Übergang zum Reziproken kehrt sich das Relationszeichen um, wir erhalten also

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-n-1}} \geq \frac{1}{n}.$$

Damit haben wir die Reihe nach unten durch die harmonische Reihe abgeschätzt, das Minorantenkriterium liefert die Divergenz.

2. Aufgabe:

Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und bestimme ihren Grenzwert:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n}$ Der Term $\frac{3^{n-1}}{4^n}$ sollte uns schon an eine geometrische Reihe erinnern, in der wir als Reihenglieder aber so etwas wie q^n mit einem $|q| < 1$ brauchen. Dies lässt sich hier beheben, indem wir die "fehlende" 3 durch eine ertragreiche 1 einschummeln:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3\cdot 4^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n}.$$

Nun haben wir die Reihe schon fast als geometrische Reihe geschrieben, zur Berechnung des Reihenwerts muss sie aber bei $n = 0$ starten, die können wir erreichen, indem wir die Summe einfach trotzdem bei 0 starten lassen, diesen Summanden aber hinterher wieder abziehen. Es gilt also:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} - \frac{3^0}{4^0}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}} - 1\right) = \frac{1}{3}(4-1) = 1.$$

Da wir hier schon einen konkreten Reihenwert ausgerechnet haben, sehen wir auch direkt die Konvergenz der Reihe.

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{5^n}$

Wegen dem Term $\frac{1}{5^n}$ könnten wir auch wieder als erstes an die geometrische Reihe denken, nur steht da ja noch ein Kosinus mit dabei. Der stellt sich aber als unproblematisch heraus, wenn man sich den Verlauf des Kosinus in Erinnerung ruft: bei ganzzahligen Vielfachen von π hat dieser gerade seine Maxima und Minima, es gilt $\cos(n\pi) = (-1)^n$.
Somit gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{5})} = \frac{5}{6}.$$

Auch hier beweist die Existenz des Reihenwertes die Konvergenz.

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4-3^n}{(n+1)!}$

Ähnlich wie oben müssen wir auch hier analysieren, welche Teile der Reihe uns bekannt vorkommen. Hier dürfte das $\frac{1}{(n+1)!}$ sein, da müssen sofort die Alarmglocken läuten: Exponentialreihe. Es gilt ja für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Das deckt sich auch mit der 3^n im Zähler unserer Reihe. Direkt anwenden können wir diese Identität aber noch nicht, dafür müssen wir die Reihe etwas auseinanderschreiben. Betrachte also ersteinmal

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(n+1)!}.$$

Die 4 hängt nicht von n ab, wir werden sie also vor die Summe schreiben. Dann sieht das schonmal ganz gut, nur das wir im Nenner kein $n!$, sondern $(n+1)!$ haben. Dies lässt sich leicht durch eine Indexverschiebung beheben, anschlieSSend müssen wir dann wie in a) noch das erste Reihenglied wieder dazuaddieren und abziehen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(n+1)!} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1\right) = 4(e^1 - 1).$$

Ein ähnliches Vorgehen klappt dann auch beim zweiten Teil der Reihe, hier müssen wir zusätzlich noch beachten, dass wir auch den Index in 3^n verschieben. Das beschert uns, wie in a), einen zusätzlichen Faktor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n!} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} - 1\right) = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}.$$

Damit erhalten wir den Reihenwert der gesamten Reihe als Differenz dieser beiden Reihenwerte, siehe auch Aufgabe 3a):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4-3^n}{(n+1)!} = 4(e-1) - \frac{1}{3}(e^3 - 1).$$

3. Aufgabe:

Welche Aussagen sind richtig, welche falsch? Beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel!

☐ Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen, so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k + b_k$ konvergent.

Die Aussage stimmt, und man kann sie zum Beispiel so beweisen: Die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ bedeutet die Konvergenz der jeweiligen Partialsummenfolgen, wir wollen die Grenzwerte a bzw. b nennen.
Für die Partialsummen der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k + b_k$ erhalten wir dann:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k + b_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k,$$

da wir in endlichen Summen die Reihenfolge der Summanden beliebig vertauschen können. Da gleichzeitig aber auch die Summe zweier konvergenter Folgen wieder konvergiert (gegen die Summe der Grenzwerte), bekommen wir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k + b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = a + b.$$

Somit ist diese Reihe also konvergent.

☐ Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k)^2$ konvergent.

Auch diese Aussage stimmt, um sie zu beweisen benutzen wir das Majorantenkriterium.
Beachte zunächst, dass die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ insbesondere bedeutet, dass a_k eine Nullfolge ist. Damit ist aber auch a_k als konvergente Folge beschränkt, das heiSSt es gibt ein $M > 0$, mit $|a_k| \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Mit dem Majorantenkriterium folgt nun

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} M|a_k| = M \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty,$$

da wir ja sogar vorausgesetzt haben, dass die Reihe über a_k absolut konvergiert. (in c) zeigen wir auch, dass diese absolute Konvergenz nötig ist)

☐ Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent. Dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot b_k$.

Die Aussage stimmt nicht, als Gegenbeispiel wählen wir $a_k = b_k = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Mit dem Leibnitz-Kriterium konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, denn $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist eine monotone Nullfolge.

Es ist aber $a_k \cdot b_k = \frac{(-1)^{2n}}{n} = \frac{1}{n}$, das heiSSt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ ist die harmonische Reihe und damit divergent. Insbesondere haben wir hier gezeigt, dass in b) die absolute Konvergenz wichtig war, denn hier haben wir eine Folge angegeben, deren Reihe zwar konvergent ist, aber die Reihe der Quadrate nicht - dies liegt daran, dass $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ nicht konvergiert.